



集合

并集

① $A \subseteq (A \cup B), B \subseteq (A \cup B)$; ② $A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$; ③ $A \cup B = B \cup A$;
④ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = \underline{\text{①}}$; 反之, 若 $A \cup B = \underline{\text{②}}$, 则 $A \subseteq B$

交集

① $(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B$; ② $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset$; ③ $A \cap B = B \cap A$;
④ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; ⑤ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = \underline{\text{③}}$; 反之, 若 $A \cap B = \underline{\text{④}}$, 则 $A \subseteq B$

补集

$\complement_U U = \emptyset, \complement_U \emptyset = U, \complement_U (\complement_U A) = A, A \cup (\complement_U A) = U, A \cap (\complement_U A) = \emptyset$

若 $A \subseteq B$, 则 $\complement_U A \supseteq \complement_U B$; 反之, 若 $\complement_U A \supseteq \complement_U B$, 则 $A \subseteq B$

若 $A = B$, 则 $\complement_U A = \complement_U B$; 反之, 若 $\complement_U A = \complement_U B$, 则 $A = B$

德·摩根定律: ① $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$;

② $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

子集与真子集个数

若集合 A 有 n 个元素, $n \in \mathbf{N}_+$, 则其子集的个数为
⑦, 真子集的个数为⑧, 非空子集的
个数为⑨, 非空真子集的个数为⑩

基本不等式

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a, b > 0)$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立

基本不等式链

$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \underline{\text{⑪}}$ ($a, b > 0$), 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立

最值定理

(设 x, y 都是正数)

若 $x + y = S$ (和为定值), 则当 $x = y$ 时, 积 xy 取得最⑫值 $\frac{S^2}{4}$

若 $xy = P$ (积为定值), 则当 $x = y$ 时, 和 $x + y$ 取得最⑬值 $2\sqrt{P}$

柯西不等式

设 a, b, c, d 均为实数, 则 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq \underline{\text{⑭}}$, 当且仅当 $ad = bc$ 时, 等号成立

权方和不等式

大招2

设 $a, b, x, y > 0$, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \underline{\text{⑮}}$, 当且仅当 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 时取等号

基本不等式

专题三

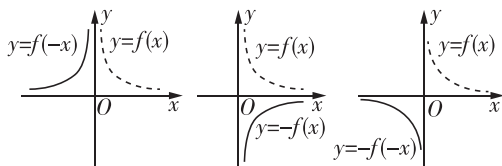
函数



列表法

平移变换：上加下减，左加右减

图左：图象关于y轴对称
图中：图象关于x轴对称
图右：图象关于原点对称

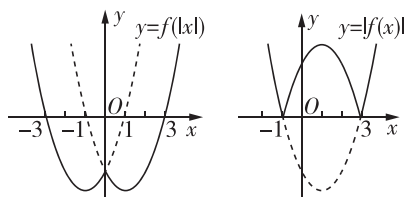


对称变换

图象变换

图象法

图左：去左复制右
图右：留上剪贴下



翻折变换

表示方法

待定系数法 — 已知函数类型

方程组法 — $f(x), f(-x)$ 或 $f(x), f(\frac{1}{x})$ 等成对出现

换元法 — 已知 $f(g(x))$ 的解析式, 求 $f(x)$ 的解析式

配凑法

解析法

函数的概念及其表示

定义域

注意实际问题中的定义域是使问题有意义的自变量的取值范围，分段函数的定义域是各段函数自变量取值范围的并集

$f(t), f(x), f(\varphi(x)), f(g(x))$ 中 $t, x, \varphi(x), g(x)$ 在对应关系 f 下的范围相同

说明：已知 $f(x)$ 的定义域为 A ，求 $f(\varphi(x))$ 的定义域，实质是已知 $\varphi(x)$ 的值域，求 x 的取值范围；已知 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 B ，求 $f(x)$ 的定义域，实质是已知 $f(\varphi(x))$ 中 x 的取值范围为 B ，求 $\varphi(x)$ 的取值范围

偶次方根：根号下的数非负；对数：真数大于0；分式：分母不为0

值域

注意新元的范围是换元后函数的定义域

形如 $y = ax + b \pm \sqrt{cx + d}$
(a, b, c, d 均为常数，且 $ac \neq 0$)

换元法

令 $t = \sqrt{cx + d}$ ，用 t 表示 x ，
转化为关于 t 的二次函数

形如 $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($ac \neq 0, ad \neq bc$)

分离常数法

$$y = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d}$$

大招4

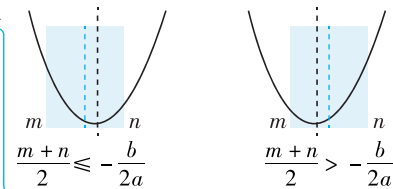
对勾函数

形如 $y = ax + \frac{b}{x}$ (a, b 同号)

形如 $\frac{\text{一次}}{\text{二次}}, \frac{\text{二次}}{\text{二次}}, \frac{\text{二次}}{\text{一次}}$

定义域不是给定范围时也可考虑用判别式法

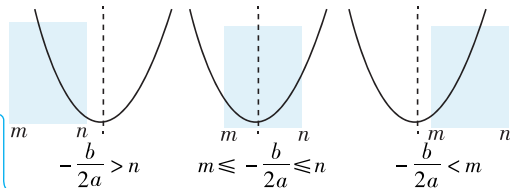
$[m, n]$ 上的最大值



函数形式为二次函数或易转化为二次函数形式
 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

配方

$[m, n]$ 上的最小值



求值域前先确定定义域，分段函数的值域是各段函数值域的并集

大招8

(1) $f(x+a)+f(x)=k$, 周期为 $2a$ (2) $f(x+a)f(x)=k$, 周期为 $2a$ (3) $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 周期为 $2a$

周期性

周期为①

双轴: 图象关于直线 $x=a$, $x=b$ 对称

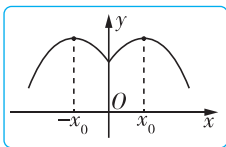
周期为②

双心: 图象关于点 $(a, 0)$, $(b, 0)$ 对称双对称性
推导周期

周期为③

一轴一心: 图象关于直线 $x=a$, 点 $(b, 0)$ 对称

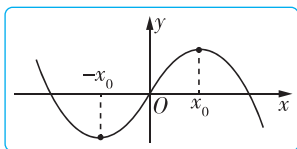
偶异



在对称区间上单调性相反, 且对称区间上有相同的最大值(或最小值), 取最值时的自变量互为相反数

 $f(-x)=f(x) \rightarrow$
偶函数

奇同



在对称区间上单调性一致, 且对称区间上有互为相反数的最值, 取最值时的自变量也互为相反数

 $f(-x)=-f(x) \rightarrow$
奇函数定义域
关于原
点对称

奇偶性

复合函数的奇偶性: 内偶则偶, 内奇同外

奇 $\pm$ 奇=奇; 偶 $\pm$ 偶=偶; 奇 $\pm$ 偶=④

加减法结论

奇 $\times$ 奇=偶; 奇 $\times$ 偶=⑤偶 $\times$ 偶=偶; 奇 $\div$ 奇=偶; 奇 $\div$ 偶=奇; 偶 $\div$ 偶=⑥

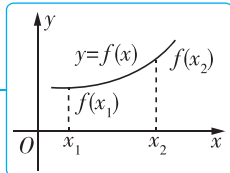
乘除法结论

函数的基本性质

单调性

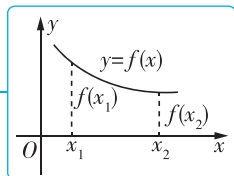
任取 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 那么当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2) [f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

$f(x) \uparrow$



任取 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 那么当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2) [f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

$f(x) \downarrow$



函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 D 上具有单调性

$a > 0$, $af(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相同;
 $a < 0$, $af(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反

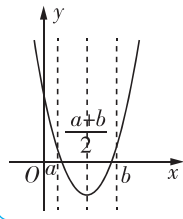
$f(g(x))$ 单调性: 同增异减

对称性

外同内反轴对称

$$f(a+x) = f(b-x)$$

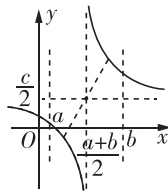
对称轴: 直线 $x = \frac{a+x+b-x}{2} = \frac{a+b}{2}$



外反内反点对称

$$f(a+x) = -f(b-x) + c$$

对称中心: 点 $(\frac{a+x+b-x}{2}, \frac{c}{2})$



大招7

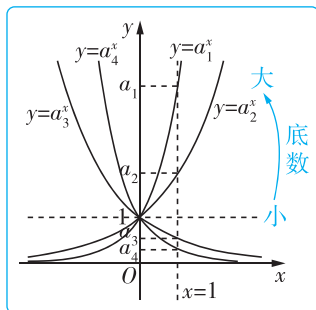
$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a (n \text{ 为奇数}), \\ |a| (n \text{ 为偶数}); \end{cases} (\sqrt[n]{a})^n = a (n \in \mathbf{N}_+, \text{ 且 } n > 1)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \textcircled{1} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}_+, n > 1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}_+, n > 1)$$

$$a^r \cdot a^s = \textcircled{2}, (a^r)^s = a^{rs}, (ab)^r = \textcircled{3}, r, s \in \mathbf{R}, \text{ 且 } a > 0, b > 0$$

指数运算



作直线 $x=1$, 则直线 $x=1$ 与各指数函数图象交点的纵坐标, 即为各指数函数的底数, 分别为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 则 $a_1 > a_2 > 1 > a_3 > a_4 > 0$. 可见在 y 轴右侧底数越大, 图象越高

图象

指数、对数函数

函数 $y = a^{f(x)}$ 的定义域与 $f(x)$ 的定义域相同

定义域

当 $a > 1$ 时, $y = a^{f(x)}$ 的单调性与 $t = f(x)$ 的单调性相同;

当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^{f(x)}$ 的单调性与 $t = f(x)$ 的单调性相反

单调性

$$y = a^{f(x)} \\ (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

指数型复合函数性质

指数函数

① 求出 $t = f(x)$ 的值域;

即为②中函数 $y = a^t$ 的定义域

② 根据 $y = a^t$ 的单调性求出 $y = a^{f(x)}$ 的值域

值域

求 $y = f(a^x)$ 的定义域, 关键是找出 $t = a^x$ 在 $y = f(t)$ 的定义域中时 x 的范围

定义域

同增异减

单调性

$$y = f(a^x) \\ (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

① 求出 $y = f(a^x)$ 的定义域对应的 $t = a^x$ 的取值范围;

即为②中函数 $y = f(t)$ 的定义域

② 根据 $y = f(t)$ 的单调性求出 $y = f(a^x)$ 的值域

值域

对数运算

$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 负数和 0 没有对数

对数恒等式: $a^{\log_a N} = \text{④}$ ($N > 0, a > 0$, 且 $a \neq 1$)

如果 $a > 0$, 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0$, 那么

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \text{⑤};$$

$$\log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R})$$

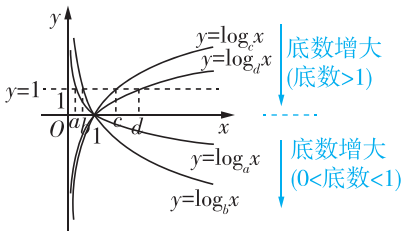
换底公式: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1; b > 0; c > 0$, 且 $c \neq 1$)

$$\log_a c \cdot \log_c a = \text{⑥}, \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1.$$

$$\log_{a^m} b^n = \text{⑦}$$

图象

作直线 $y=1$, 则直线 $y=1$ 与各对数函数图象交点的横坐标, 即为各对数函数的底数, 分别为 a, b, c, d , 结合单调性, 可得 $0 < a < b < 1 < c < d$



对数函数

对数型复合函数性质

$$y = \log_a f(x) \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

定义域 $f(x) > 0$ 时 x 的范围

令 $t = f(x)$, 函数 $y = \log_a f(x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的单调性与函数 $t = f(x)$ ($f(x) > 0$) 的单调性在 $a > 1$ 时相同, 在 $0 < a < 1$ 时相反

值域 由 x 求出 $t = f(x)$ 对应的范围, 由 t 求出 $y = \log_a t$ 对应的范围

$$y = f(\log_a x) \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

定义域 $x > 0$, 且需结合外层函数的定义域求解

单调性 令 $t = \log_a x$, 只需研究 $t = \log_a x$ 及 $y = f(t)$ 的单调性, 再结合复合函数的单调性法则判断

值域 由 x 求出 $t = \log_a x$ 对应的范围, 由 t 求出 $y = f(t)$ 对应的范围

专题四 导数



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数的概念

曲线的切线：割线的极限位置

切线的斜率：曲线 $f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率 $k = f'(x_0)$

几何意义

切点已知，利用点斜式写出切线方程为
 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

求在某点的
切线方程

切点未知，先设切点，点斜式写出切线方程，
代入已知点

求过某点的
切线方程

切线方程

问题：直线 l 既是函数 $f(x)$ 的图象在 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线，又是函数 $g(x)$ 的图象在 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线，求直线 l 的方程

方法：分别表示出两个切线方程，然后利用斜率相等，截距相等，得

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2), \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{cases}$$

公切线

注意斜率不存在的情况

基本概念

导数
(一)

$C' = 0$ (C 为常数)；

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha \neq 0$)；

$(\sin x)' = \cos x$ ；

$(\cos x)' = \text{①}$ ；

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ；

$(\log_a x)' = \text{②}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)；

$(e^x)' = e^x$ ；

$(a^x)' = \text{③}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)

基本初等函数的导数

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ ；

$[Cf(x)]' = Cf'(x)$ (C 为常数)；

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ；

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \text{④}$ ($g(x) \neq 0$)

导数的
四则运
算法则

基本运算

若 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 则 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

简单复合函数的导数

基本应用

单调性

定义

对于函数 $y=f(x)$, 如果在某区间上⑤_____ , 那么 $f(x)$ 在该区间上单调递增

对于函数 $y=f(x)$, 如果在某区间上 $f'(x)<0$, 那么 $f(x)$ 在该区间上单调递减⑥_____

“在某区间内, $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$)”是“函数 $f(x)$ 在该区间上单调递增(减)”的⑦_____条件;
“在某区间内, $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$), 且在该区间的任意子区间内都不恒为0”是“函数 $f(x)$ 在该区间上单调递增(减)”的充要条件

求单调区间的步骤

第一步, ⑧_____;
第二步, 求出导数 $f'(x)$;
第三步, 由 $f'(x)>0$ (或 <0)解出相应的 x 的取值范围, 对应的区间为 $f(x)$ 的单调递增(减)区间

若涉及含参函数的单调性, 则需判断参数对导函数在某区间的正负是否有影响, 若有影响需分类讨论

单调性求参

转化为恒成立求参问题求解

极值

求极值

求出 $f'(x)$ 的零点 x_1, x_2 , 如果对于 x_1 左侧附近的任意 x , 都有 $f'(x)>0$ (函数 $f(x)$ 单调递增); 对于 x_1 右侧附近的任意 x , 都有 $f'(x)<0$ (函数 $f(x)$ 单调递减), 即“左正右负”(“左增右减”), 那么此时 x_1 是 $f(x)$ 的极大值点

如果对于 x_2 左侧附近的任意 x , 都有 $f'(x)<0$ (函数 $f(x)$ 单调递减); 对于 x_2 右侧附近的任意 x , 都有 $f'(x)>0$ (函数 $f(x)$ 单调递增), 即“左负右正”(“左减右增”), 那么此时 x_2 是 $f(x)$ 的极小值点

如果 $f'(x)$ 在 x_1 (或 x_2)的左侧附近与右侧附近均为正号或均为负号, 即“左右同号”, 则 x_1 (或 x_2)一定不是 $y=f(x)$ 的极值点

可导函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值的必要条件是⑨_____

极值求参

利用极值点处的导数值为0, 极值点附近两侧的导数值异号, 常转化为零点求参问题求解

最值

求解步骤: 第一步, 求函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上的极值;
第二步, 将第一步中求得的极值与 $f(a), f(b)$ 比较, 得到 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值

问题：已知导函数满足的一个不等式，去解一个函数不等式的问题

大招16

方法：

第一步，逆用求导法则，构建一个新函数（新函数的导函数能通过题目中所给的导函数不等式判断正负）。
第二步，求出新函数的导函数，得到新函数的单调性。
第三步，利用新函数的单调性解决问题

导数的逆向构造

原理：将原条件转化为同一函数的两个函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间满足的关系，从而利用函数 $f(x)$ 的单调性，得到 a 与 b 之间的关系

大招17

构造函数

指对跨阶同构的关键在于利用指对
幂互化 ($x = \text{①}$) 或取对数

地位同等同构

指对跨阶同构

类型

无中生有同构

同构

分离变量构造

详见P12

作差构造

问题：已知有两个极值点为 x_1, x_2 ，求参数 a 的范围，或证明与极值点 x_1, x_2 有关的不等式问题

根与系数关系硬算

方法：利用根与系数关系，将三个变量 x_1, x_2, a 转化成一个变量

问题：多变量问题，变量的次数都是相同的

大招20

方法：采用齐次化（同除）、换元，以减少题目中的变量，达到“消元”的目的

齐次化

导数
(二)——
进阶
应用
之常
用方法

详见 $\begin{cases} e^x \text{ ②} & x+1, \text{ 当且仅当 } x=0 \text{ 时取等号.} \\ \ln x \text{ ③} & x-1, \text{ 当且仅当 } x=1 \text{ 时取等号} \end{cases}$
 P14

切线
放缩当 $x > 0$ 时, $x > \sin x$; 当 $x < 0$ 时, $x < \sin x$.

$$x < \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

大招21

问题: 证明不等式 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)分割
与
放缩

若函数易分割成两个函数, 则令函数 $f(x) = g(x) - h(x)$, 通过证明
 ④, 进而有 $f(x) = g(x) - h(x) > 0$; 或者通过证明
 $g(x)_{\max} < h(x)_{\min}$, 进而有 $f(x) = g(x) - h(x) < 0$

方法

寻找辅助函数 $g(x)$, 证明得 $f(x) > g(x) > 0$ (或 $f(x) < g(x) < 0$), 常用切线放缩

大招24

放
缩

大招18

洛必达法则

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 或 ∞ , 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{⑤}$

大招19

泰勒展
开式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

问题: 已知 x_a, x_b 为函数 $f(x)$ 的零点, 去证明关于零点 x_a 的不等式,
 或者关于零点差 $|x_b - x_a|$ 的不等式

零
点
放
缩方法: 将不可解零点 x_1 放缩成可以求解的零点 x_2 , 从而证明一些关于零点 x_1 的不等式常用结论: $f(x), g(x)$ 的零点分别为 x_1, x_2 .(1) 若函数 $g(x)$ 单调递增, 且 $f(x) > g(x)$ 恒成立, 则有 $x_1 < x_2$.(2) 若函数 $g(x)$ 单调递增, 且 $f(x) < g(x)$ 恒成立, 则有 ⑥.(3) 若函数 $g(x)$ 单调递减, 且 $f(x) > g(x)$ 恒成立, 则有 $x_1 > x_2$.(4) 若函数 $g(x)$ 单调递减, 且 $f(x) < g(x)$ 恒成立, 则有 ⑦.

大招32

大招22

指对处理

指成双, 对落单

大招23

主元法

问题: 已知参数的范围, 证明不等式问题, 无法分离参数或越求导越复杂

方法: 先将 x 固定, 以参数为主元, 得到一个关于 x 的不等式

通过分离参数,将参数与变量彻底分离开来,从而把一个含参问题转化为一个非含参问题,进而通过导数研究分离后得到的函数的单调性,极值与最值,最终解决问题

分离参数

大招27

不等式恒成立问题可转化为函数最值问题求解,若由于参数、分段函数以及自变量 x 的范围等,造成问题需要分多种情况讨论的,往往要基于函数的单调性、极值点、零点等进行分类讨论求解

分类讨论

大招28

通过取一些特殊值(通常取0,1)来缩小参数的取值范围,从而减少讨论参数取值范围时分析讨论的量

必要性探路

大招29

端点效应:(1)如果函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$,且 $f(a) = 0$,则①_____ ;(2)如果函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in [a, b], f(x) \leq 0$,且 $f(a) = 0$,则 $f'(a) \leq 0$; (3)如果函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$,且 $f(b) = 0$,则 $f'(b) \leq 0$; (4)如果函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in [a, b], f(x) \leq 0$,且 $f(b) = 0$,则 $f'(b) \geq 0$

大招30

端点&中间点效应

中间点效应:(1)如果函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$,且 $f(x_0) = 0$,则 $f'(x_0) = 0$,且 $f''(x_0) \geq 0$; (2)如果函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in [a, b], f(x) \leq 0$,且 $f(x_0) = 0$,则 $f'(x_0) = 0$,且②_____

问题识别:已知 $x \in (a, b)$,求证 $u(x) > v(x)$

方法:

第一步,将所给的不等式移项,即作差构造函数 $f(x) = u(x) - v(x)$,转化为求证不等式 $f(x) > 0$;

第二步,在 (a, b) 内,判断 $f'(x)$ 的符号;

第三步,若 $f'(x) > 0$,说明 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增,只需将所给区间的左端点的值代入 $f(x)$,证得 $f(a) \geq 0$ 即可;若 $f'(x) < 0$,说明 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减,只需将所给区间的右端点的值代入 $f(x)$,证得 $f(b) \geq 0$ 即可

作差比较

恒成立求参

导数
(三)—
进阶
应用
之常
见题型

不等式证明

指对处理

主元法

分割与放缩

详见P11

函数零点问题

求零点个数

大招25

第一步, 先通过导函数 $f'(x)$ 分析函数 $f(x)$ 的单调性;
 第二步, 根据函数零点存在定理确定函数 $f(x)$ 在每个单调区间上的零点个数为0还是1;
 第三步, 最终得到函数 $f(x)$ 零点个数

直接法

对函数进行求导, 观察参数是否影响函数的单调性, 若不影响, 通过函数极值和0的关系求解; 若影响, 则需分类讨论

已知零点求参

图象法

分离参数, 由 $f(x)=0$ 分离出参数 a , 得 $a=g(x)$, 根据直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象的交点个数求参数范围

将函数 $f(x)$ 分成两个函数观察它们图象的变化趋势, 找到临界的位置(两函数图象相切), 从而求参

大招26

问题: 方程 $f'(x_0)=0$ 很难解或者压根没法解

隐极值点代换

方法: 第一步, 求导后得到 $f'(x_0)=0$;
 第二步, 根据 $f'(x_0)=0$ 代换掉参数或对极值 $f(x_0)$ 的表达式进行转化, 得到一个仅含有 x_0 , 形式简单且容易求取值范围的式子;
 第三步, 根据隐极值点 x_0 的取值范围, 确定极值 $f(x_0)$ 的取值范围, 进而证明不等式

大招31

极值点 & 拐点偏移

极值点偏移

已知函数极值点, 判断 x_1+x_2 与 ③ 的大小关系

方法1: 构造函数 $g(x)=f(x)-f(2x_0-x)$

方法2: 泰勒公式构建不偏移的函数

方法3: 对数平均不等式

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

详见 P15

方法1: 对数平均不等式

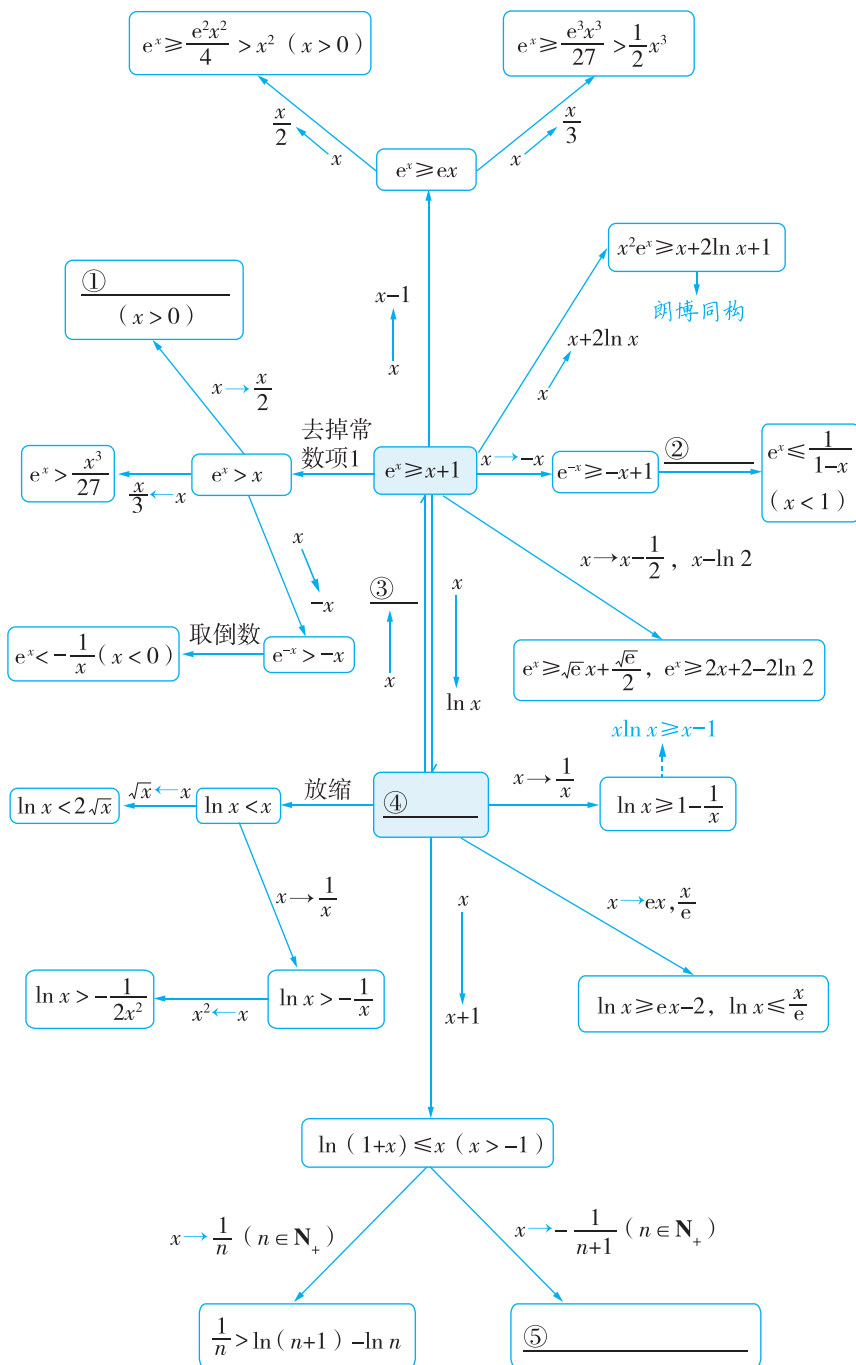
已知函数极值点, 判断 x_1+x_2 与 x_0^2 的大小关系

方法2: 构造函数 $g(x)=④$

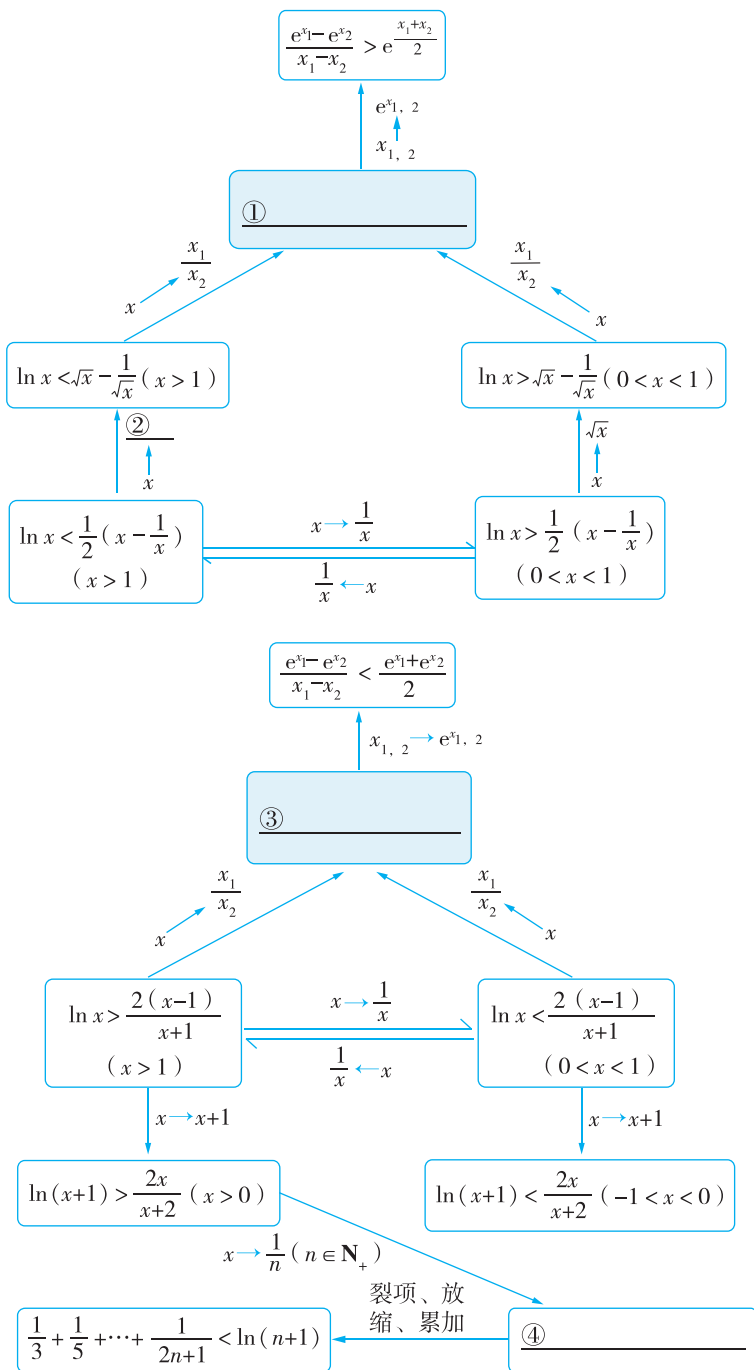
拐点偏移

适用于: 已知 $f(x_1)+f(x_2)=2f(m)$, 判断 x_1+x_2 与 $2m$ 的大小关系

方法: 构造函数 $g(x)=⑤$



和对数平不等式有关的二级结论



专题五

三角函数



知一求二
(求解时注意角终边所在象限)

平方关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

同角三角函数基本关系

商数关系: $\tan \alpha = \textcircled{1} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z})$

$k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha (k \in \mathbf{Z})$

常用于除余变切,

例如: $\frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} =$

$\frac{\tan \theta}{\tan \theta + 1}, \sin^2 \theta -$

$2\cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} =$

②

奇变偶不变: 若 k 是奇数, 则函数名要改变(正弦变余弦, 余弦变正弦); 若 k 为偶数, 则函数名不变

符号看象限: 将 α 看成锐角时, $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha (k \in \mathbf{Z})$ 所在的象限, 在原来的函数名下的三角函数值的符号

诱导公式

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

和差角公式

倍角: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha; \cos 2\alpha = \textcircled{3} =$

$2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha; \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

倍角 & 半角公式

半角: $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$

$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

常见形式: $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta;$

$2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta);$

$\frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} - \textcircled{4}$

$(\frac{\pi}{3} + \alpha) + (\frac{2\pi}{3} - \alpha) = \pi$

已知角和差或2倍关系为未知角

式子中两角和差为隐形角

拆角

如: $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = \cos 0, \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} =$

$\cos \frac{\pi}{3}, \textcircled{5} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$

常值代换

a, b 不同时为 0 时, 有 $a \sin x + b \cos x =$

$\textcircled{6} \quad (a \neq 0 \text{ 时 } \tan \varphi = \frac{b}{a})$

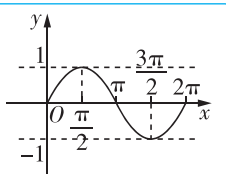
辅助角公式

常用三角公式

三角函数 (一)

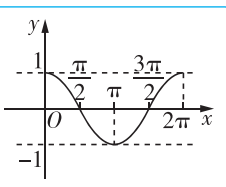
图象 ($k \in \mathbf{Z}$)

正弦函数
 $y = \sin x$



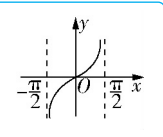
定义域: $\mathbf{R}$
值域: $[-1, 1]$

余弦函数
 $y = \cos x$



定义域: $\mathbf{R}$
值域: $[-1, 1]$

正切函数
 $y = \tan x$



定义域: ⑧
值域: $\mathbf{R}$

找准五点: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

若为正、余弦型函数, 如 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, 则令 ⑦ $\underline{\hspace{2cm}} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, 所求 x 即为对应五点的横坐标

三点 $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$
两线 $x = -\frac{\pi}{2}$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$

先向左 ($\frac{\varphi}{\omega} < 0$) 或向右 ($\frac{\varphi}{\omega} > 0$) 平移 $|\frac{\varphi}{\omega}|$ 个单位, 再将所有点的

横坐标变为原来的 $|\omega|$ 倍, 纵坐标变为原来的 $|\frac{1}{A}|$ 倍

平移
伸缩
变换
问题

$y = \sin x$

先向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位, 再将所有点的横坐标变为原来的 ⑨ 倍, 纵坐标变为原来的 $|\mathbf{A}|$ 倍

先将所有点的横坐标变为原来的 $|\frac{1}{\omega}|$ 倍, 再向左 ($\frac{\varphi}{\omega} > 0$) 或向右 ($\frac{\varphi}{\omega} < 0$) 平移 ⑩ 个单位, 纵坐标变为原来的 $|\mathbf{A}|$ 倍

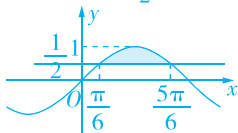
$y = \cos x$

$y = A \sin(\omega x + \varphi)$

先用诱导公式化为 $y = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 再进行

平移伸缩变换

如:求 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 的解集



作出对应三角函数
图象与直线 $y=a$, 求
出对应角, 结合图
象求出范围

三角函数
图象法

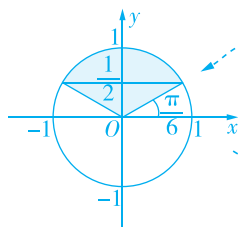
作出单位圆, 找出
对应角, 利用三角
函数定义求出范围

单位圆法

解三角
不等式

正切函数尤其注意定义域

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$



若为 $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2}$, 则令

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \text{①} \leq \frac{5\pi}{6} +$$

$$\text{则 } \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解出 x 即可

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) \quad y = A\cos(\omega x + \varphi)$$

$$T = |\frac{2\pi}{\omega}|$$

周期性

$$\varphi = \text{②} \quad (\text{奇}) \quad \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{奇})$$

$$\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{偶}) \quad \varphi = k\pi \quad (\text{偶})$$

奇偶性

实质是:
奇变偶
不变

$$\text{对称轴: 令 } t = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{令 } t = k\pi$$

$$\text{对称中心: 令 } t = k\pi$$

$$\text{令 } t = \text{③}$$

对称性

$$\text{增: } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2k\pi - \pi \leq t \leq 2k\pi$$

$$\text{减: ④}$$

$$2k\pi \leq t \leq 2k\pi + \pi$$

单调性

$$y = A\tan(\omega x + \varphi)$$

$$T = |\frac{\pi}{\omega}|$$

周期性

无对称轴

对称性

$$\text{对称中心: 令 } t = \text{⑤}$$

$$\text{增: } -\frac{\pi}{2} + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

无减

单调性

三角函数 (二)

整体思想:
令 $t = \omega x + \varphi$,
解出 x 即可

$$A > 0, \omega > 0, \\ k \in \mathbb{Z}$$

性质

若 $\omega < 0$, 常根据复合
函数“同增异减”的
原则求单调性

求出的 x 为对称
中心横坐标

解析式

$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$

$A>0, \omega>0, k \in \mathbb{Z}$

求 A, b

$$A = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}, b = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$$

求 φ

最值点法: $\omega x_0 + \varphi = \text{⑥}$

零点法: $\omega x_0 + \varphi = k\pi$

注意该点是上升零点还是下降零点

特殊点法: 直接代入点求解, 但要注意多解的取舍

已知点的横坐标为 x_0

求 ω

性质法: 利用对称轴或对称中心间的距离求 T , 后求 ω

卡根法: 利用对称轴或对称中心表示 ω , 再结合图象构造方程/不等式(组)求解

大招34

换元后要注意
新元的范围

范围问题

形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b (A, \omega>0)$

$x \in \mathbb{R}$, 值域为 $[-A+b, A+b]$

$x \in D$, 令 $t=\omega x+\varphi$, 转化为求 $y=A\sin t+b (t \in M)$ 的值域

形如 $y=asin^2x+bsin x+c (a \neq 0, x \in D)$

令 $t=\text{⑦}$ ($t \in P$)

转化为关于 t 的二次函数求值域

形如 $y=\sin x+\cos x+\sin x \cos x$

令 $t=\sin x+\cos x$, 则 $\sin x \cos x=\text{⑧}$

形如 $y = \frac{a \sin x + b}{c \sin x + d} (ac \neq 0)$

分离常数法

将式子化为只有分母含 $\sin x$ 的形式, 再利用三角函数有界性求解

反解法

用 y 反表示出 $\sin x$ (或 $\sin(x+\varphi)$), 利用三角函数有界性建立关于 y 的不等式求解

形如 $y = \frac{\sin x + b}{\cos x + d}$

数形结合法

将式子看作单位圆上的点 $(\cos x, \sin x)$ 与点 ⑨ 间连线的斜率

专题六

解三角形



常用比例式: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R$ ①

式子含有边的齐次形式,常利用 $a = 2R \sin A$,
 $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径) 边化角

式子含有角的正弦的齐次形式,常利用 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 角化边

$\sin(A - B) = 0$ (或 $\sin A = \sin B$) $\Rightarrow$ 等腰三角形;

$\sin 2A = \sin 2B \Rightarrow$ ② 三角形;

$\cos A \sin B = 0$ (或 $\sin A = 1$) $\Rightarrow$ 直角三角形;

$\sin A = \cos B \Rightarrow$ 直角或钝角三角形

$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \cos C = 0 \Rightarrow$ 直角三角形;

$a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow \cos C > 0 \Rightarrow$ 锐角三角形;

$a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow \cos C < 0 \Rightarrow$ 钝角三角形;

式子含有边的二次或其中两边的乘积,常利用

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos C$ 边化角

式子含有角的余弦形式,常利用

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 角化边

证明: $\sin A = \sin(B + C) =$

$\sin B \cos C + \sin C \cos B$, 利

用正弦定理角化边可得

$a = b \cos C + c \cos B$,

$b =$ ③

$c = a \cos B + b \cos A$

$\sin(B + C) = \sin A$, $\cos(B + C) =$ ④

$\tan(B + C) = -\tan A$;

$\sin \frac{B+C}{2} =$ ⑤, $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$

任意三角形: $A > B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow \sin A >$

$\sin B \Leftrightarrow \cos A < \cos B$

锐角三角形: $A + B > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A > \frac{\pi}{2} -$

$B \Leftrightarrow$ ⑥ $\Leftrightarrow \cos A < \sin B$

正弦定理

边角
齐次
替换

边化角

角化边

从角
考虑

从边
考虑

三角形
形状判断

c 为最大边时

余弦定理

边角
余弦
替换

边化角

角化边

三角形中的
射影定理

几个恒等式

三角形中
常用结论

常用大小结论

解三角形

求周长最
值/范围余弦定理+
基本不等式例如:已知 a, A , 有

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = (b+c)^2 - ⑦ \geq (b+c)^2 - 2 \times (1 + \cos A) \times \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

需利用基本不等式
的变形 $bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$,
可求得 $b+c$ 的最值正弦定理+三
角函数性质例如:已知 $a=1, A=\frac{\pi}{3}$, 则 $2R=$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}}, b+c = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin B + \sin C) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin B + \sin(B + \frac{\pi}{3}))$$

利用三角形内角和
为 π 转化后结合辅
助角公式进行整理
(尤其注意锐角)

面积问题

面积公式

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B =$$

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c)r \quad (r \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 内切圆半径})$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(\text{其中 } p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

应用:
张角定理

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AD} = \frac{\sin \alpha}{AC} + \frac{\sin \beta}{AB}$$

当 $\alpha=\beta$ 时,可用倍角公式化
简得到 $AD=⑧$ 均可求得
 AD 长

$$2AB^2 + 2AC^2 = 4AD^2 + BC^2$$

平行四边形恒等式
(AD 是中线)

$$AD^2 = AB^2 \cdot \frac{CD}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} - BD \cdot CD$$

斯特瓦尔特定理

$$AD^3 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

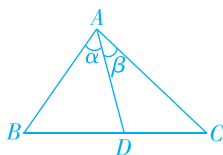
斯库顿定理

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

角平分线定理

五边两
角模型

大招38

底边 BD 与 CD 比
例已知时,也可
用向量法

整理得中线定理:

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$